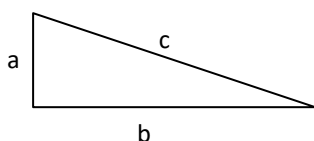


1. REPASO DE TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras relaciona los lados de un triángulo rectángulo.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Para recordar:

Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90°.

Los lados que forman el ángulo de 90° se llaman catetos y lado más largo es la hipotenusa.

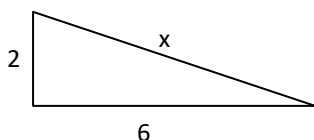
La aplicación del teorema de Pitágoras es el cálculo de un lado de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros lados

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 3^2 + 8^2 &= x^2 \\ x^2 &= 73 \\ x &= \sqrt{73} = 8,54 \end{aligned}$$

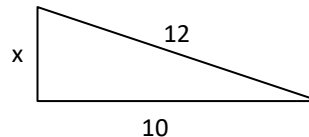
Actividad 1

Calcular los lados no conocidos de los siguientes triángulos (unidades en cm):

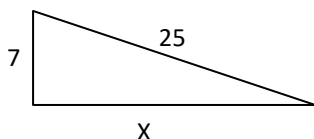
1.1.



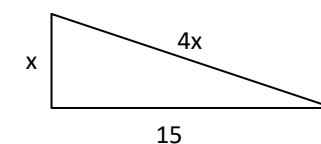
1.2.



1.3.



1.4.



2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Las razones trigonométricas relacionan los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son tres:

SENO $\quad \text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

COSENO $\quad \text{cos } A = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$

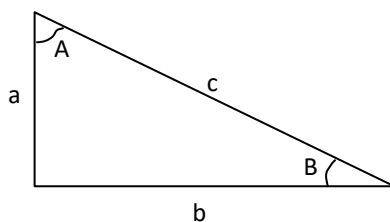
TANGENTE $\quad \text{tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$

Hay que tener en cuenta que el ángulo cambia en cada ejercicio, por tanto cambian los catetos opuesto y contiguo.

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{cos} A = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{a}$$

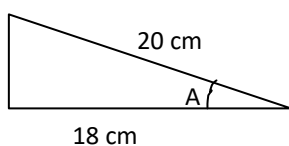


$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cos} B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tan} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{b}$$

Calcular el seno del ángulo A



$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{18}$$

Calculamos el valor del cateto opuesto con el teorema de Pitágoras

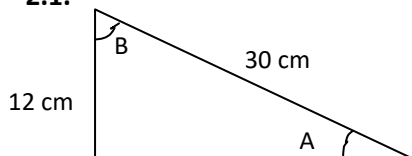
$$x = \sqrt{20^2 - 18^2} = \sqrt{76} = 8.718 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{x}{18} = \frac{8,718}{18} = 0.484$$

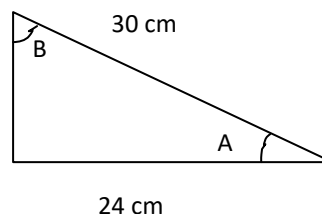
Actividad 2

Calcular el valor del seno, coseno y tangente de los ángulos A y B en los siguientes triángulos:

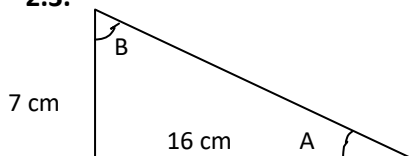
2.1.



2.2.



2.3.



Cálculo de las razones trigonométricas con la calculadora

En la calculadora tenemos las teclas **SIN COS TAN** para calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Tenemos las inversas de esas teclas **SIN⁻¹ COS⁻¹ TAN⁻¹** para calcular el ángulo cuando se conoce la razón trigonométrica.

$$\operatorname{sen} 42^\circ = 0,66913$$

$$\operatorname{cos} 75,5^\circ = 0,25038$$

$$\operatorname{tan} 10,8 = 0,19076$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{cos} 0,14 = 81,95^\circ$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tan} 2,74 = 69,95^\circ$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,38 = 22,33^\circ$$

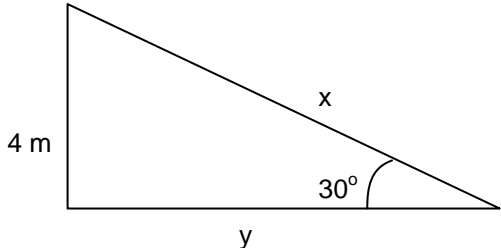
Actividad 3

Completar la tabla redondeando a tres decimales las razones trigonométricas y a dos decimales los ángulos.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30°			
	0,456		
			3,543
		0,567	
			1

3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

3.1. Calcular los lados no conocidos de un triángulo rectángulo si se conoce un lado y un ángulo.



Para el cálculo de x se utiliza la fórmula del seno que nos relaciona el cateto opuesto del ángulo, que es el que se conoce, y la hipotenusa, que es la que queremos calcular.

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{4}{x}$$

si de esta expresión se despeja x y se sustituye $\text{sen } 30^\circ$ por su valor quedaría:

$$x = \frac{4}{\text{sen}30^\circ} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ m}$$

Para el cálculo de y se utilizaría la fórmula de la tangente que nos relaciona el cateto opuesto del ángulo, que es el que se conoce, y el cateto contiguo, que es el que queremos calcular.

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{4}{y}$$

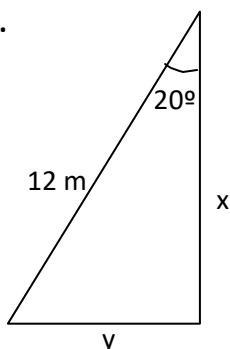
si de esta expresión se despeja la incógnita y se sustituye $\text{tg } 30^\circ$ por su valor quedaría:

$$y = \frac{4}{\text{tg } 30^\circ} = \frac{4}{0,577} = 6,928 \text{ m}$$

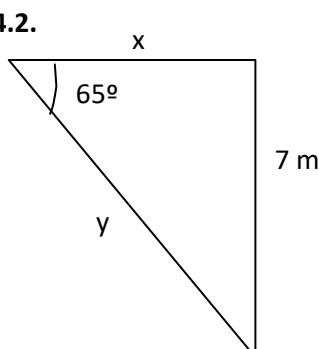
Actividad 4

Calcula los lados no conocidos de los siguientes triángulos:

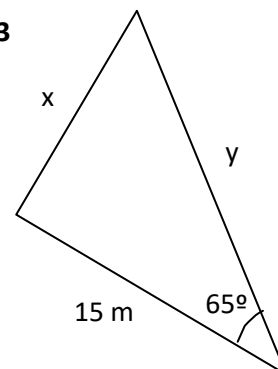
4.1.



4.2.



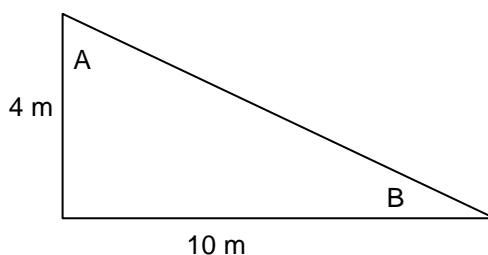
4.3



Actividad 5

- 5.1 Una escalera apoyada en la pared, tiene que llegar hasta los 4 metros de altura. El encargado nos dice que se debe inclinar 60° respecto del suelo por seguridad. ¿De qué longitud se necesita la escalera?
- 5.2 Calcula el área de un rombo de lado 5 cm. y cuyos ángulos agudos miden 20°
- 5.3 Calcula el perímetro y la superficie de un pentágono regular de 6 dm de radio.
- 5.4 Calcula todos los lados de un triángulo isósceles sabiendo que su ángulo menor es 20° y su lado menor mide 8 cm.
- 5.5 Una cinta transportadora tiene que elevar grava a una altura de 8 metros, si el ángulo de inclinación de la cinta respecto del suelo es de 35° , ¿cuánto medirá la cinta transportadora?

3.2. Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo conocidos dos de sus lados.



Para recordar:
Lo tres ángulos de un triángulo SIEMPRE suman 180°

Para el cálculo del ángulo A se utiliza la fórmula de la tangente que relaciona el cateto opuesto y el contiguo. Quedaría:

$$\tan A = \frac{10}{4} = 2,5$$

Utilizando en la calculadora la función tg^{-1} obtenemos

$$A = 68,19^\circ$$

Para el cálculo del ángulo B se utiliza la fórmula de la tangente que relaciona el cateto opuesto y el contiguo. Quedaría:

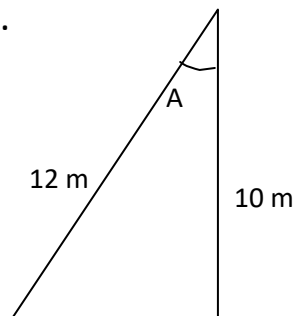
$$\text{tg } B = \frac{4}{10} = 0,4$$

Utilizando en la calculadora la función \tan^{-1} obtenemos $B = 21,8^\circ$

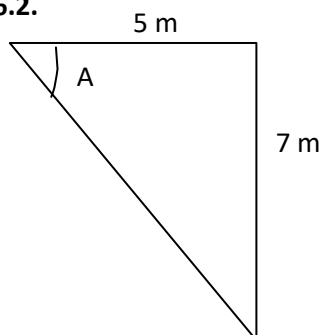
Actividad 6

Calcula los ángulos señalados de los siguientes triángulos:

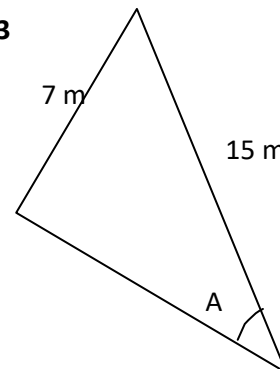
6.1.



6.2.



6.3.

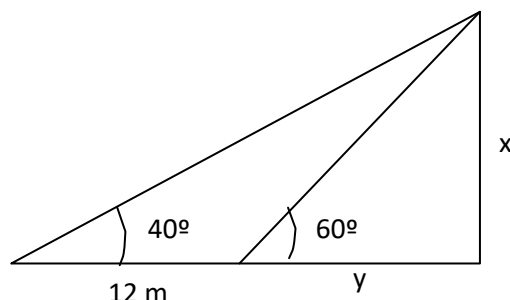


Actividad 7

- 7.1 Calcula el ángulo de inclinación de una escalera respecto del suelo si la escalera mide 4,5 metros y está apoyada a una altura de 3,85 m.
- 7.2 Calcula los ángulos de un rombo cuyos lados miden 6 cm sabiendo que su diagonal mayor mide 5 cm.
- 7.3 Calcula todos los ángulos de un triángulo isósceles si los dos lados iguales miden 7 cm y el otro lado mide 5.
- 7.4 Una tirolina une dos puntos con un desnivel de 25 metros que están a una distancia de 60 metros, ¿qué ángulo de inclinación tiene el cable de la tirolina respecto del suelo?
- 7.5 La anchura de una portería de fútbol es de 4 metros y su altura es de 2´4 metros. Para lanzar un penalti la pelota se sitúa a 10´8 metros de la portería y a igual distancia de los postes. Calcule:
 - a) El ángulo máximo de elevación que puede llevar la pelota para que pase por debajo del larguero
 - b) El ángulo máximo barrido horizontalmente para poder meter gol (la pelota pasa entre los postes)

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Aquellas situaciones en que se tengan como datos dos triángulos y una sola medida que no coincida con un lado de un triángulo rectángulo se resuelven con un sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Si se observa el dibujo se verá que se tienen dos triángulos rectángulos, uno con ángulo de 40° cuyos catetos miden x e $y+12$ y otro con un ángulo de 60° cuyos catetos miden x e y .

El sistema se hace con la fórmula de la tangente en los dos triángulos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} \quad \text{esto es:} \quad 1,732 = \frac{x}{y}, \quad \text{por tanto se deduce que } x = 1,732 y$$

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{y+12} \quad \text{esto es} \quad 0,839 = \frac{x}{y+12} \quad \text{por tanto se deduce: } x = 0,839 \cdot (y+12)$$

$$\text{Igualando ambas expresiones se tiene que } 1,732 y = 0,839 \cdot (y+12)$$

$$\begin{aligned} \text{Resolviendo la ecuación } 1,732 y - 0,839 y &= 10,068 \\ 0,893 y &= 10,068 \end{aligned}$$

$$\text{Es decir que } y = 11,274 \text{ m}$$

$$\text{Como } x = 1,732 y \text{ obtenemos que } x = 19,527$$

Actividad 8

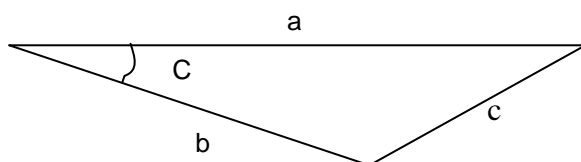
- 8.1** Sara y su amigo Luis quieren escalar una montaña y necesitan conocer su altura h . Para ello han conseguido un teodolito miden el ángulo desde un punto hasta la cima resultando 45° . A continuación se alejan de la montaña 60 metros y vuelven a medir y ahora son 30° . ¿Cuánto mide la montaña?
- 8.2** Para medir la altura de un acantilado desde una barco en el mar se realiza la siguiente operación. Se instala en la parte superior del acantilado un mástil de 8 metros de altura, desde el barco se mide el ángulo desde la horizontal a la base del mástil dando un resultado de 35° , a continuación se mide el ángulo a la parte superior del mástil resultando un ángulo de 45° . ¿Cuánto mide el acantilado?
- 8.3** Desde una carretera se ve la cima de una montaña, la visual forma un ángulo de 20° con la horizontal. La carretera se dirige horizontalmente y en línea recta hacia la montaña, después de avanzar 4 Km vemos que la visual a la cima y la horizontal forman un ángulo de 63° , ¿qué desnivel hay entre la montaña y la carretera?

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Para la resolución de triángulos no rectángulos es necesario conocer tres datos, dos ángulos y un lado o dos lados y un ángulo. Según los datos que tengamos se utiliza el teorema del seno o el teorema del coseno.

5.1. Teorema del coseno

Se aplica cuando de un triángulo no rectángulo se conocen dos lados y el ángulo que forman esos lados, como en la siguiente figura:



El teorema del coseno permite calcular el lado no conocido:

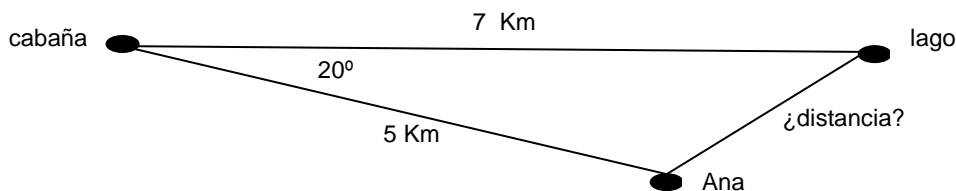
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C$$

Diagrama de un triángulo con un lado de 12 m, otro de 9 m, y un ángulo de 23° entre ellos. El tercer lado se denota como x .

$$x^2 = 12^2 + 9^2 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \cos 23$$
$$x^2 = 26,17$$
$$x = 5,12 \text{ m}$$

Actividad 9

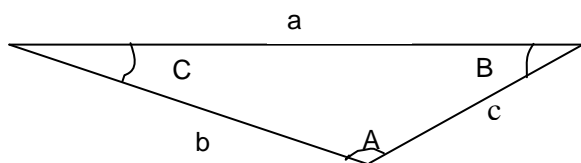
- 9.1 Ana sale de una cabaña para dirigirse a un lago que está a 7 kilómetros en línea recta. Al salir de la cabaña se desorienta y toma una dirección errónea, desviándose 20° de la recta que une la cabaña y el lago. Después de caminar durante 5 Km, ¿a qué distancia se encontrará del lago?



- 9.2 Un jugador de golf lanza la pelota desde la posición de salida de un hoyo, distante 350 metros, y alcanza una distancia de 180 metros. Pero el golpe ha sido defectuoso y la dirección de la pelota forma un ángulo de 20° respecto de la dirección del hoyo. ¿A qué distancia del hoyo ha quedado su pelota?

5.2. Teorema del seno

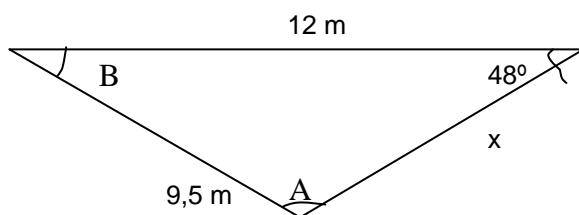
Se aplica cuando de un triángulo no rectángulo se conocen dos lados y uno de los ángulos que no forman esos lados o cuando se conocen dos ángulos y una lado.



El teorema del seno relaciona los lados y ángulos de un triángulo cualquiera

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

En el siguiente ejemplo se tienen como datos dos lados del triángulo y un ángulo que no es el que forman dichos lados.



$$\frac{9,5}{\text{sen } 48} = \frac{12}{\text{sen } A}$$

$$9,5 \cdot \text{sen } A = 12 \cdot \text{sen } 48^\circ$$

$$\text{sen } A = \frac{12 \cdot \text{sen } 48^\circ}{9,5} = 0,93871$$

$$A = 69,836^\circ$$

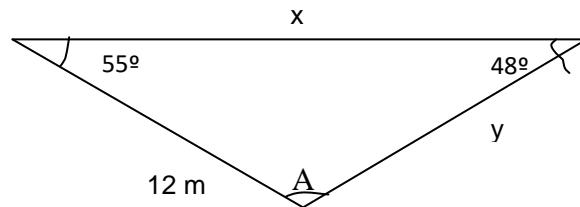
$$B = 180^\circ - 48^\circ - 69,836 = 62,164^\circ$$

$$\frac{x}{\text{sen } 62,164} = \frac{9,5}{\text{sen } 48}$$

$$x = \frac{9,5 \cdot \text{sen } 62,164}{\text{sen } 48}$$

$$x = 11,3 \text{ m}$$

En el siguiente ejemplo se tienen como datos dos ángulos del triángulo y un lado



$$\frac{y}{\text{sen } 55} = \frac{12}{\text{sen } 48}$$

$$y = \frac{12 \cdot \text{sen } 55}{\text{sen } 48}$$

$$y = 13,227 \text{ m}$$

$$A = 180^\circ - 55^\circ - 48^\circ = 77^\circ$$

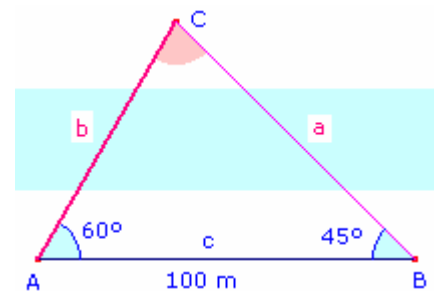
$$\frac{x}{\text{sen } 77} = \frac{12}{\text{sen } 48}$$

$$x = \frac{12 \cdot \text{sen } 77}{\text{sen } 48}$$

$$x = 10,94 \text{ m}$$

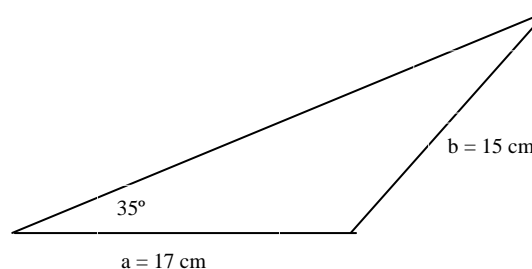
Actividad 10

- 10.1** Una persona pasea por la orilla de un río y observa en la otra orilla un punto C. Para medir la distancia b entre A y C obtiene las medidas indicadas en la figura. Hallar dicha distancia b.



- 10.2** Dos barcos están alejados 350 metros. El primer barco observa que la visual a un faro con la visual al otro barco forman 70°. El segundo barco observa que la visual al mismo faro con la visual al otro barco forma 38°. ¿A qué distancia está cada barco del faro?

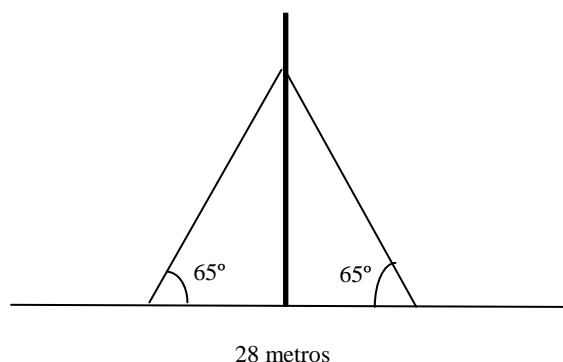
- 10.3** Calcula el valor de todos los ángulos del siguiente triángulo:



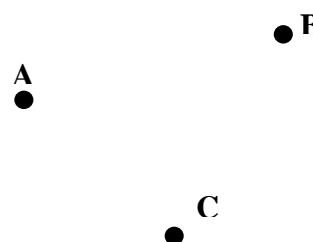
6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Actividad 11

- 11.1** Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables de acero tirantes simétricos como se indica en la figura. Si la distancia entre las fijaciones de los cables es de 28 metros. Calcula la altura de la antena a la que se encuentran fijados los cables

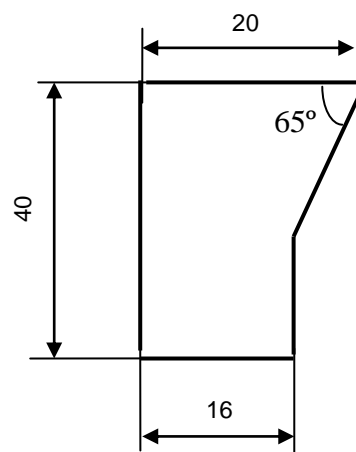


- 11.2** Los tres puntos A, B y C del croquis representan tres pueblos situados en una llanura. Se sabe que la distancia en línea recta entre A y B es de 12 Km, la distancia entre A y C es de 9 Km y el ángulo que forman las rectas AB y BC es de 40° . ¿Qué distancia hay entre B y C?



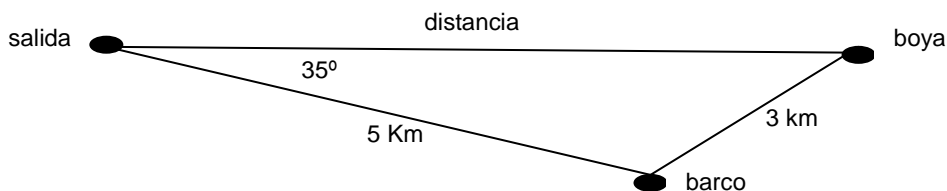
- 11.3** En un solar con la forma y las medidas indicadas en el plano se quiere construir un edificio. ¿Qué perímetro tiene el solar?

Las cotas están en metros

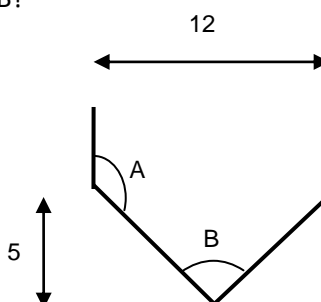


- 11.4** Entre dos faros hay una distancia de 4 km. Un barco está situado a la misma distancia de los dos faros. Para calcular dicha distancia mide el ángulo que forman las visuales a cada uno de los faros, siendo de 50° . ¿Cuál es la distancia entre el barco y cada faro?
- 11.5** El hilo de una cometa mide 30 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 67° , ¿a qué altura vuela la cometa?
- 11.6** Se tienen dos tramos rectos de dos carreteras que se cruzan formando un ángulo de 50° entre ambas. ¿A qué distancia se encuentran un coche y un camión que se encuentran a 300 y 500 metros respectivamente del cruce?
- 11.7** Se tiene que instalar unos paneles solares detrás de unos árboles de 30 metros de altura. Se desea que los árboles no den sombra en ningún caso a los paneles. En el momento más desfavorable los rayos solares inciden con una inclinación de 30° respecto a la horizontal y los paneles está a una distancia de 15 metros detrás de los árboles, ¿a qué altura del suelo se tendrán que instalar para que los árboles nunca les den sombra?

- 11.8** En una regata de vela se tiene que llegar a una boya, para aprovechar mejor el viento un barco sigue una dirección que forma 35° con la recta que une la salida y la boya. Después de recorrer 5 kilómetros se encuentra a 3 km de la boya ¿a qué distancia están la salida y la boya?

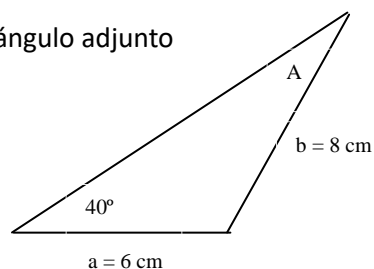


- 11.9** El croquis representa la punta simétrica de una broca de madera de longitud 80 mm. Las cotas están en mm. ¿Calcular los ángulos A y B?



- 11.10** Una escalera de tijera está abierta de manera que sus dos patas forman un ángulo de 36° . Las patas de la escalera están separadas por 125 cm. Calcula la altura a la que llega la escalera y la longitud de cada pata en metros.

- 11.11** Calcula el valor del ángulo A en el triángulo adjunto

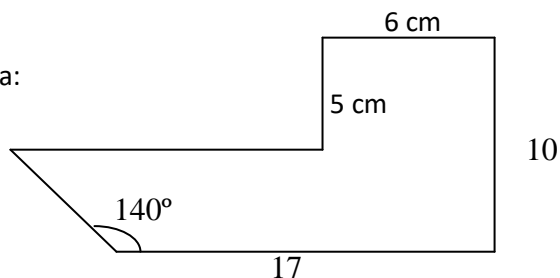


- 11.12** Desde un punto A se ven dos árboles, el primero está a 7 metros y el segundo a 12 metros del punto A. Si el ángulo que forman las visuales desde el punto A a los dos árboles es de 50° , ¿qué distancia hay entre los dos árboles?

- 11.13** Julia y María caminan juntas, llegan a un cruce de caminos rectos que forman un ángulo de 50° . ¿A qué distancia estarán una de la otra al cabo de una hora y media si ambas caminan a una velocidad de 4 km/h?

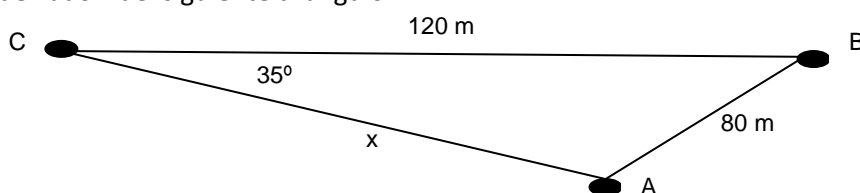
- 11.14** De un campo en forma triangular se conoce la longitud de dos de sus lados, 150 metros y 80 metros respectivamente y el ángulo que forman dichos lados, 65° . Calcular el perímetro y la superficie de dicho campo.

11.15 Calcular el área de la siguiente figura:



11.16 Los brazos de un compás están separados 60° y miden 14 cm. Halla el diámetro del círculo que se traza con dicho compás en esa posición.

11.17 Calcular el valor del lado x del siguiente triángulo:

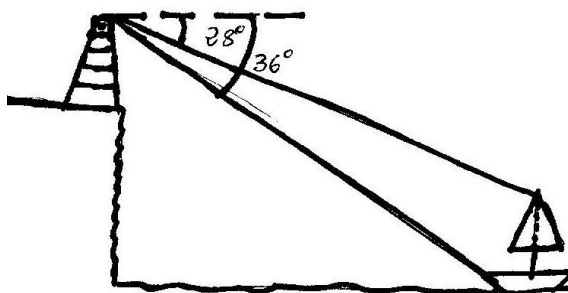


11.18 Una antena se sujeta con 4 cables o tirantes. Todos ellos forman el mismo ángulo con el suelo. Dos de ellos tienen una longitud de 4,5 metros y los otros dos de 6 metros. Se sabe que los de 4,5 metros se sujetan a una altura de 3,75 metros.

- ¿Qué ángulo forman los tirantes con el suelo?
- ¿A qué altura de la antena se fijan los tirantes de 6 metros de longitud?

11.19 Dos naturalistas, que denominaremos A y B están siguiendo los movimientos de un oso, cuando en un momento dado, reciben al mismo tiempo en sus radiorreceptores la señal de localización del collar emisor que el animal lleva sujeto. Si los naturalistas están separados una distancia de 10 km y la dirección de donde proviene la señal forma ángulos de 40° con A y 65° con B, ¿A qué distancia está cada uno de ellos del oso.

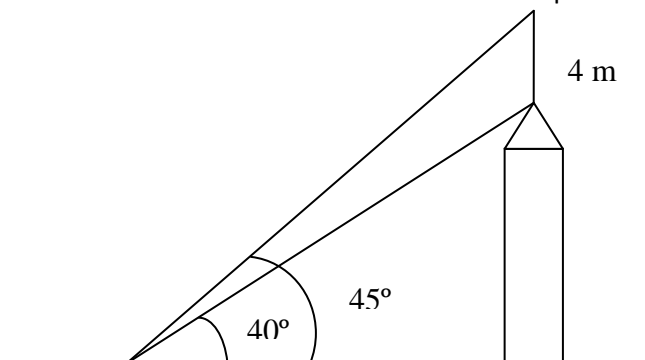
11.20 Desde un faro se ve un velero en el mar. Para calcular su distancia a la costa se mide el ángulo de depresión con el que se observa la parte superior, siendo de 28° . Después se mide el ángulo de depresión con el que se observa la parte inferior, resultando 36° . Si se sabe que la parte no sumergida del barco tiene una altura total de 11 metros, ¿A qué distancia se encuentra de la costa? ¿A qué altura se encuentra el observador del faro?



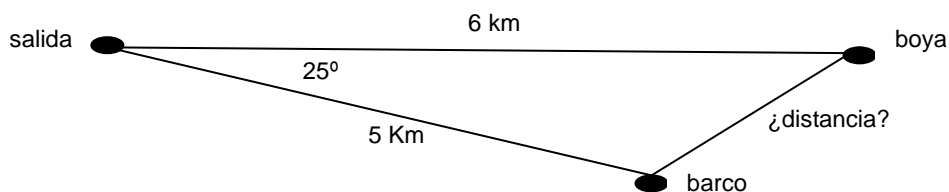
Ejercicios propuestos en pruebas de acceso en Aragón

1.- (2000) Desde la orilla de un río se observa la copa de un árbol, situado en la otra orilla, bajo un ángulo de 60° . Si nos alejamos 8 m. de la orilla, el ángulo de observación es de 45° . Calcule la altura del árbol y la anchura del río.

2.- (2006) En una torre de una iglesia hay instalado un pararrayos de 4 metros de altura en la parte superior del tejado. Para medir la altura de la torre desde un punto se mide el ángulo de la visual hasta la base del pararrayos, siendo un ángulo de 40° . Posteriormente se mide el ángulo de la visual a la parte superior del pararrayos, siendo un ángulo de 45° . ¿Cuánto mide la torre?. ¿A qué distancia nos encontramos de la vertical del pararrayos?



3.- (2007) Entre la salida y la primera boya en una regata de vela hay 6 km. Un barco decide, para aprovechar mejor el viento, seguir una dirección que forma 25° con la recta que une la salida y la boya. Después de recorrer 5 km en esa dirección, ¿a qué distancia se encontrará de la boya?

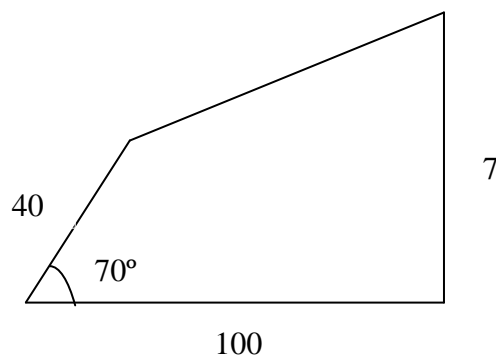


4.- (2009) En una deshidratadora de alfalfa se tiene que instalar una cinta transportadora que eleve la alfalfa una altura de 12 metros. El comercial nos explica que el ángulo entre la cinta y el suelo que permite un funcionamiento óptimo es de 35° .

- a) Calcular la longitud de la cinta transportadora que necesitamos.
- b) Si entre el principio y el final se necesitan instalar dos soportes verticales de forma que la cinta quede dividida en tres tramos iguales ¿qué altura tienen que tener?

5.- (2008) Una empresa agraria nos solicita un trabajo: se desea vallar un terreno para cultivar alfalfa y para ello nos aporta el siguiente croquis con las cotas en metros.

- a) ¿Cuánto costará la valla si el presupuesto es de 3 euros/m?
- b) ¿Qué superficie tiene el terreno?

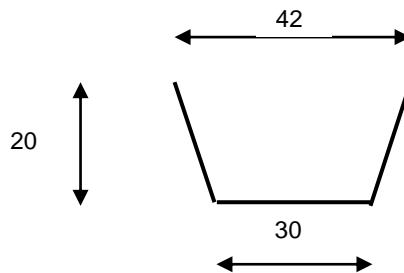


6.- (2010) En una empresa metálica se solicita un encargo de 300 metros de un canal para riego, para ello nos aportan el siguiente croquis del perfil de la canal con las cotas en centímetros.

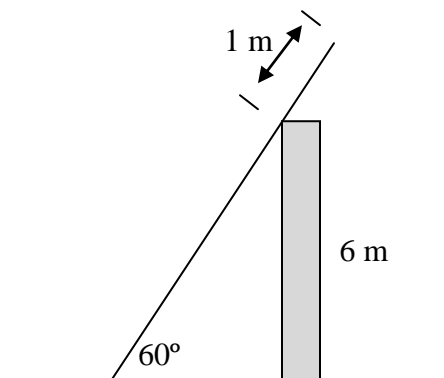
¿Qué ángulo hay entre las paredes verticales y horizontales?

Si el coste del metro cuadrado de chapa es de 4 euros.

¿Cuál es el presupuesto del encargo?



7.- (2013) Una escalera de mano está apoyada sobre un muro vertical de 6 m de altura formando un ángulo de 60° con el suelo. La escalera es demasiado larga y un metro de la misma sobresale por el otro lado del muro. ¿Cuál es la longitud de la escalera? ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra el extremo de la escalera? (Aproxima los resultados a los cm)



8.- (2018) En una competición de saltos de moto se tiene que preparar una rampa con una inclinación de 37° respecto a la horizontal y una longitud de 14 metros. La rampa se sujeta con tres soportes verticales, la separación entre ellos es de 3.5 metros y el último soporte está en el final de la rampa.

a) ¿Qué altura tiene que tener el último soporte?

b) ¿Cuál es la separación entre el principio de la rampa y el primer poste?

c) Redondea los resultados a centímetros.

